

## References

- 1 Musilimov B., Otelbaev M. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1981, 21, 6, p. 1430–1434.
- 2 Muhamediev G. *Spectrum of a difference operator and some embedding theorems. Boundary value problems for differential equations and their applications in mechanics and techniques*, Alma-Ata: Nauka, 1983, p. 104, 105.
- 3 Smailov E.S. *Difference embedding theorems for weighted Sobolev spaces and their applications*. Math. Dokl. AN SSSR, 1983, 270, 1, p. 52–55.
- 4 Mynbaev K.T., Otelbaev M.O. *Weighted functional spaces and spectrum of differential operators*, Moscow: Nauka; Ch. edit. of phis.math. lit., 1988, 288 p.
- 5 Oinarov R., Stikharnyi A.P. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1991, 50, 5, p. 1130–1135.
- 6 Bulabaev A.T., Muhambetzhano A.T. *Collection KazGNU*, Almaty, 1993.
- 7 Triebel H. *Theory of Function Spaces*, transl. from Eng., Moscow: Mir, 1986, p. 450.
- 8 Sobolev S.L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, 3-d izd., Moscow: Nauka, 1988, p. 336.
- 9 Kussainova L., Ospanova A. *Proceedings of The World Congress on Engineering: Lecture Notes*, London: UK., 2014, p. 773, 774.

УДК 517.514

А.Таскараев, А.Абжапбаров, Н.К.Аширбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О.Ауезова, Шымкент  
(E-mail: abilbek\_47@mail.ru)**Минимальные и выпуклые поверхности**

В статье рассмотрено уравнение Монжа-Ампера, правая часть которого и есть сумма интегральных условных кривизн различных порядков. Интегрируя заданное уравнение, получено интегральное уравнение. Применяя теоремы И.Я.Бакельмана, построен нелинейный оператор  $U$ , переводящий конус выпуклых поверхностей на себя. Изучены функционально-топологические свойства оператора  $U$ . Даны важные оценки применения теоремы Штейнера, а также доказаны непрерывность и компактность этого оператора. С помощью теоремы Красносельского доказано существование неподвижной точки оператора, являющегося решением данной задачи.

*Ключевые слова:* поверхность, выпуклость, кривизна, оператор, интегральные уравнения.

Минимальные поверхности являются математическим объектом, достаточно хорошо моделирующим физические мыльные пленки. Обратное, многие глубокие свойства математических поверхностей проявляются в опытах с мыльными пленками.

В современном вариационном исчислении принято выделять так называемые одномерные и многомерные вариационные задачи. Под одномерными задачами подразумевается исследование функционалов, определенных, например, на пространстве кусочно-гладких кривых  $\gamma(t)$  в римановом многообразии. Классическими примерами таких функционалов являются функционал длины кривой

$\int |\dot{\gamma}| dt$  и функционал действия  $\int |\dot{\gamma}|^2 dt$ . Экстремальными таких функционалов являются некоторые кривые в многообразии. Например, экстремальными функционала длины являются геодезические, параметризованные произвольным непрерывным параметром, а экстремальными функционала действия являются геодезические, параметризованные натуральным параметром.

Однако во многих вопросах физики и механики появляются важные функционалы, определенные на многомерных объектах и поверхностях, например, на пространстве двумерных поверхностей с фиксированной границей. Важным примером является функционал площади, сопоставляющей каждой такой поверхности ее площадь.

Другим примером, тесно связанным с предыдущим, является функционал Дирихле. В такой терминологии функционал площади и функционал Дирихле можно назвать двумерными функционалами. В работе Дао Чонг Тхи и А.Т.Фоменко [1] изучены многомерные функционалы.

Лагранж проводит уравнение минимальных поверхностей (т.е. экстремалей функционала площади) к форме, в которой функции  $p$  и  $q$  находятся из следующего условия: две дифференциальные 1-формы  $pdx + qdy$  и  $\frac{pdx - qdy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$  должны являться полными дифференциалами.

Эти функции и задают минимальную поверхность.

Следующий важный шаг в направлении развития минимальных поверхностей (т.е. поверхностей локально минимальной площади) был сделан Гаспаром Монжем.

Сначала Монж развивает общую теорию кривых и двумерных поверхностей, в частности, анализирует свойства двух главных кривизн в произвольной точке поверхности. Затем он отдельно рассматривает случай, когда оба радиуса кривизны (в каждой точке поверхности) равны между собой и имеют противоположные знаки. Отсюда следует, что средняя кривизна поверхности, т.е. сумма величин, обратных к радиусам кривизны, тождественно равна нулю в каждой точке поверхности. Другими словами, эта поверхность минимальна, локально минимизирует функционал площади поверхности.

В частности, Монж прямо указывает на следующее важное свойство этой поверхности: если обвести ее часть непрерывным замкнутым контуром, то из всех поверхностей, проходящих через этот контур, ее площадь внутри контура будет наименьшей.

Катеноид и геликоид есть двумерные минимальные поверхности. Вообще, проблема нахождения поверхности наименьшей площади с заданной границей была названа «проблемой Плато» еще Лебегом в 1902 г.

Известно, что функционал площади и функционал Дирихле [1; 56] имеют вид

$$A(r) = \iint_{D^2} \sqrt{EG - F^2} dudv;$$

$$D(r) = \iint_{D^2} (E + G) dudv,$$

где  $r = r(u, v)$  — радиус-вектор поверхности  $\Phi$  в  $R^3$ ;  $D(\subset R^2)$  — диск в  $R^2$ , а  $E, F, G$  — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, являющейся образом диска в  $R^3$ . Экстремальные критические радиус-векторы для этих функционалов устроены так. Для функционала площади ими являются те и только те радиус-векторы, для которых средняя кривизна соответствующей поверхности равна нулю (минимальные поверхности). Экстремальными радиус-векторами для функционала Дирихле являются те и только те векторы, которые являются гармоническими относительно  $u, v$ , т.е.

$$\Delta r = r_{uu} + r_{vv} = 0.$$

Функционал площади и функционал Дирихле связаны неравенством:  $D(r) \geq A(r)$ , причем равенство достигается в том и только в том случае, когда  $E = G, F = 0$ , т.е. когда координаты  $u, v$  конформны.

Рассмотрим поверхности, задающиеся в  $R^3$  графиком однозначной функции  $z = f(x, y)$ , т.е. допускающие гладкую ортогональную взаимно однозначную проекцию на двумерную плоскость или на область в ней. Пусть поверхность  $\Phi$  проектируется в область  $G$  с выпуклой границей  $\gamma$ . Если поверхность задается графиком, то функционал площади имеет вид

$$A[f] = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Уравнение Эйлера для функционала площади имеет вид

$$(1 + f_x^2) f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2) f_{xx} = 0.$$

**Утверждение.** Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура  $\gamma'$ , взаимно однозначного проектирующегося на плоскость в выпуклую замкнутую кривую  $\gamma$ , существует минимальная поверхность с данной границей, проектирующаяся, следовательно, на область, ограниченную на плоскости кривой  $\gamma$ .

Существование и единственность этого решения есть следствие проекции границы. Если от выпуклости области  $G$  отказаться, то утверждение становится неверным [1; 56].

Следующий параграф посвящен построению минимальной поверхности с невыпуклой проекцией.

§1. Построение минимальной поверхности с невыпуклой проекцией

Как известно, задача о построении минимальной поверхности с заданным краем, имеющей однозначную проекцию на плоскость  $x, y$ , эквивалентна задаче Дирихле

$$(1 + Z_y^2)Z_{xx} - 2Z_x Z_y Z_{xy} + (1 + Z_x^2)Z_{yy} = 0; \quad (1.1)$$

$$Z|_{\partial\Omega} = h(s). \quad (1.2)$$

Если область  $\Omega$  имеет границей замкнутую выпуклую кривую  $\Gamma$  с существенно положительной кривизной, то задача Дирихле (1.1–1.2) всегда имеет единственное решение из класса  $C^{m,\delta}$ , при этом предполагается, конечно, что

$$h(s) \in C^{m,\delta+\varepsilon}, \text{ а } \delta + \varepsilon < 1, \Omega \in L_m \text{ (} m > 3 \text{)}.$$

Здесь  $C^{m,\delta}$  — класс функций на  $\Omega$ , имеющих непрерывные производные всех порядков до  $m$  и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем  $\delta \in [0, 1]$ ;  $L_m$  — класс областей, у которых для каждой кривой, входящей в состав границы области, функции  $x(s), y(s)$  имеют  $m - 1$  производные, а  $L_{m,\lambda}$  — класс областей, у которых для каждой кривой, входящей в состав границы области, функции  $x(s), y(s)$  имеют  $m - 1$  производные, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем  $\lambda \in [0, 1]$ .

Существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнений (1.1–1.2) есть прямое следствие теоремы 28 из [2].

Если не предполагать строгой выпуклости контура  $\Gamma$ , то минимальной поверхности с заданным краем и однозначной проекцией на некоторую плоскость может не существовать [2]. Аналитически это означает, что краевая задача (1.1–1.2) не имеет решений.

Теперь докажем достаточное условие решения задачи Дирихле (1.1–1.2).

Рассмотрим оценки для функций

$$AC - B^2, \quad A^2 + 2B^2 + C^2, \quad D,$$

где

$$A = 1 + Z_y^2 = 1 + q^2;$$

$$B = -Z_x Z_y = -pq;$$

$$C = 1 + Z_x^2 = 1 + p^2;$$

$$D = 0.$$

Отсюда

$$AC - B^2 = 1 + p^2 + q^2;$$

$$A^2 + 2B^2 + C^2 = 1 + (1 + p^2 + q^2).$$

Поэтому, если положить

$$R(p^2 + q^2) = 1 + (1 + p^2 + q^2);$$

$$Q(p^2 + q^2) = 1 + p^2 + q^2;$$

$$S(p^2 + q^2) = 0,$$

то неравенства (13.2, 3–5) из [2] будут иметь место с постоянными

$$\mu = 1, \quad \nu = 1, \quad \delta = 0.$$

Отметим, что  $R(p^2 + q^2)$  и  $Q(p^2 + q^2)$ , очевидно, неубывающие функции величины  $p^2 + q^2$ .

Пусть функции

$$u = f(x, y);$$

$$v = g(x, y)$$

принадлежат классу  $H(J_1, J_2, T_0, \tau_0, \chi_0, m_0, M_0^+, M_0^-)$  (см. [9, §14] и удовлетворяют условию

$$W_{fg} \leq W_0(H) + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  — произвольно взятое малое число. Тогда имеют место неравенства

$$\frac{1}{\tau_0} (p_1^2 + q_1^2) \leq p^2 + q^2 \leq T_0 (p_1^2 + q_1^2).$$

По формуле (13.2.6) из [2] строим функцию

$$N(p_1^2 + q_1^2) = \frac{Q\left(\frac{1}{r_0}(p_1^2 + q_1^2)\right)}{R\left[T_0(p_1^2 + q_1^2)\right](p_1^2 + q_1^2)} = \frac{\tau + (p_1^2 + q_1^2)}{\tau_0 \left[1 + (1 + T_0(p_1^2 + q_1^2))^2\right](p_1^2 + q_1^2)}.$$

Обозначим через  $M^+$ ,  $M^-$  — верхнее и нижнее извивания кривой  $\gamma$ , построенной по краевому условию

$$Z(\partial G) = H(S),$$

и будем считать, что  $M^+$ ,  $M^-$  строго положительны.

Далее полагаем, что

$$N_H(p_1^2 + q_1^2; \gamma; N) = \inf N(\bar{p}_1^2 + \bar{q}_1^2);$$

$$N_b(p_1^2 + q_1^2; \gamma; N) = \inf N(\bar{p}_1^2 + \bar{q}_1^2),$$

где точная нижняя грань берется соответственно в кругах

$$(\bar{p}_1 - p_1)^2 + (\bar{q}_1 - q_1)^2 \leq M^-;$$

$$(\bar{p}_1 - p_1)^2 + (\bar{q}_1 - q_1)^2 \leq M^+.$$

Очевидно, что функции  $N_H$  и  $N_b$  в нуле ограничены снизу и допускают оценки

$$N_H \geq \frac{\tau_0 + (\sqrt{W} - \sqrt{M^-})^2}{\tau \left(1 + \left[1 + T_0(\sqrt{W} + \sqrt{M^-})^2\right]^2\right) (\sqrt{W} + \sqrt{M^-})^2} = n_H(W);$$

$$N_b \geq \frac{\tau_0 + (\sqrt{W} - \sqrt{M^-})^2}{\tau \left(1 + \left[1 + T_0(\sqrt{W} + \sqrt{M^+})^2\right]^2\right) (\sqrt{W} + \sqrt{M^+})^2} = n_b(W),$$

где в обоих соотношениях положено  $W = p_1^2 + q_1^2$ .

В соответствии с обозначениями §9 из [1] имеем

$$A(n_H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_H(p_1^2 + q_1^2) dp_1 dq_1 <$$

$$< \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_H(p_1^2 + q_1^2) dp_1 dq_1 = A(N_H),$$

$$= A(n_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_b(p_1^2 + q_1^2) dp_1 dq_1 <$$

$$< \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N_b(p_1^2 + q_1^2) dp_1 dq_1 = A(N_b),$$

Важно отметить, что числа  $A(n_H)$  и  $A(n_b)$  находятся, явно, по свойствам краевого условия и именно по числам  $M^-$  и  $M^+$ . Поэтому в дальнейшем для получения эффективно проверяемых достаточных условий существования минимальной поверхности с данным краем удобно пользоваться величинами  $A(n_H)$  и  $A(n_b)$ .

В соответствии с § 13 из [2] для отображения

$$\begin{aligned} u &= f(x, y); \\ v &= g(x, y), \end{aligned} \tag{1.3}$$

переводящего  $\Omega$  в строго выпуклую область  $G$ , имеем

$$\begin{aligned} W_{f,g} &= \frac{\pi \delta^2 + \mu(\beta(f) + \beta(g))}{\chi_0^2 J_1^2 v} = \\ &= \frac{\pi(\beta(f) + \beta(g))}{\chi_0^2 J_1^2}, \end{aligned}$$

так как  $\delta = 0$ , а  $\mu = v = 1$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  — наименьшая из разностей  $A(N_H) - A(n_H)$  и  $A(N_b) - A(n_b)$ . Подберем отображение (1.3) так, чтобы было

$$W_0(H) \leq W_{f,g} + \varepsilon.$$

Тогда, если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} W_{f,g} &\leq A(n_H); \\ W_{f,g} &\leq A(n_b), \end{aligned}$$

или развернуто

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega \cup \partial} \{ f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + g_{xx}^2 + 2g_{xy}^2 + g_{yy}^2 \} &\leq \\ &\leq \frac{J_1^2 \chi_0^2}{\pi} A(n_H), \\ \sup_{\Omega \cup \partial} \{ f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + g_{xx}^2 + 2g_{xy}^2 + g_{yy}^2 \} &\leq \\ &\leq \frac{J_1^2 \chi_0^2}{\pi} A(n_b), \end{aligned} \tag{1.4}$$

то для  $\max_{\Omega \cup \Gamma} |Z(x, y)|$  и  $|\text{grad}Z|$  на  $\Gamma$  могут быть получены конечные оценки, в зависимости лишь от исходных данных задачи Дирихле (1.1–1.2) и констант, определяющих класс отображений

$$H(T_0, \tau_0, \chi_0, m_0, M^+, M^-).$$

Эти оценки, как нетрудно заметить, будут равномерными в задаче Дирихле с параметрами  $\xi \in [0, 1]$ :

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0; \tag{1.5}$$

$$Z|_{\partial} = \xi h(s). \tag{1.6}$$

Отсюда уже вытекают равномерные априорные оценки  $|\text{grad}Z|$  во всей области  $\Omega \cup \Gamma$ , так как при всех  $\xi \in [0, 1]$  уравнение (1.5) в задаче Дирихле (1.5–1.6) принадлежит классу  $L$  и, следовательно, по теореме 21 из [2] исходная задача Дирихле (1.1–1.2) имеет единственное решение  $Z \in C^{m+2, \delta}$ , если выполняются неравенства (1.4). Тем самым получено достаточное условие для существования минимальной поверхности.

## §2. Условная кривизна $M$ -выпуклой поверхности

Пусть  $G \subset E^n \subset E^{n+1}$  — замкнутая ограниченная выпуклая область. Через  $M(G)$  обозначим класс минимальных гиперповерхностей с краем, край которого однозначно проектируется на  $\partial G$ , а сама поверхность — в область  $G$ . Ясно, что  $M(G) = M_0^+ \cup M_0^-$ , где  $M^+(G)$  — подкласс минимальных гиперповерхностей, расположенных в полупространстве  $Z > 0$ , а  $M^-(G)$  — подкласс минимальных гиперповерхностей, расположенных в полупространстве  $Z < 0$ . Мы рассмотрим один из них, например,  $M^+(G)$ .

Пусть  $\Phi \in M^+(G)$  — минимальная гиперповерхность и задается уравнением  $Z = \varphi(x)$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

Пусть

$$m_\varphi = \inf_{x \in \bar{G}} \varphi(x); M_\varphi = \sup_{x \in \bar{G}} \varphi(x); H_{M_\varphi} \text{ — график функции } Z = M_\varphi \text{ в } G.$$

Через  $T_\Phi$  обозначим выпуклые оболочки  $\Phi$  и  $H_{M_\Phi}$  т.е.

$$T_\Phi = C_0(\Phi, H_{M_\Phi}).$$

Пусть далее  $Z_Q$  — шаровой цилиндр с направляющей  $Q$  и образующими параллельными оси  $Z$ , где  $Q$  — наименьший замкнутый  $n$ -мерный шар на гиперплоскости  $E^n$ , содержащий в себе  $G$ .

Через  $Z_\Phi$  обозначим часть  $Z_Q$ , отсекаемую от него гиперплоскостями  $Z = M_\Phi$  и  $Z = m_\Phi$ .

Очевидно, имеют место включения

$$\begin{aligned} \Phi &\subset \partial T_\Phi, a; \\ T_\Phi &= Z_\Phi. \end{aligned}$$

Исходя из фактов, изложенных в [1], для интегральных кривизн различных порядков имеем:

$$1) \text{ при всех } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad \omega_k(\partial T_\Phi, \partial T_\Phi) \leq \omega_k(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi); \quad (2.1)$$

$$2) \text{ при всех } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad \tilde{\omega}_k(\Phi, G) \leq \omega_k(\partial T_\Phi, \partial T_\Phi). \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) получим неравенство

$$\tilde{\omega}_k(\Phi, G) \leq \omega_k(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi). \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.1–2.3) для интегральных кривизн различных порядков, перенесенных на гиперплоскость  $E^n$ , получим равенство

$$\begin{aligned} \omega_0(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi) &= 2\mu_n r^n + \nu_{n-1}(M_\Phi - m_\Phi)r^{n-1}; \\ \omega_0(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi) &= \nu_{n-2} \left[ (M_\Phi - m_\Phi)r^{n-k+2} + \frac{2d_k \cdot k}{n-k+1} r^{n-k+1} \right]; \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n-1; \\ \omega_n(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi) &= n\nu_{n-1}d_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\mu_n$  — объем единичного  $n$ -мерного шара;  $\nu_{n-1}$  — площадь  $(n-1)$ -мерной сферы и

$$d_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \psi d\psi,$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Доказательство этого утверждения аналогично, как и теоремы 1 из §5, гл. 2 [3].

В главе III из [3] доказано существование обобщенного решения уравнения в функциях множеств, имеющих вид

$$\omega(R, \Phi, B) = \sum_{k=0}^n \mu_k(a_k, \Phi, B) \quad (2.5)$$

в классе  $K^+(G)$ , где  $\omega(R, \Phi, B)$  — условная кривизна выпуклой гиперповерхности  $\Phi$ ;  $\mu_k = \mu_k(a_k, \Phi, B)$  — интегральные условные кривизны порядка  $k$  выпуклой гиперповерхности  $\Phi$ ;  $B$  — борелевское множество в ограниченной выпуклой области  $G \subset E^n$ ;  $a_k = a_k(x, z) > 0$  — непрерывные функции в области  $G$ .

Гиперповерхность называется  $m$ -выпуклой, если она является границей выпуклой оболочки некоторой минимальной гиперповерхности  $\Phi$ .

Если  $\Phi \in M^+(G)$ , то через  $\Phi_0$  обозначим границу выпуклой оболочки  $\Phi$ , т.е.  $\Phi_0 = \partial C_0\Phi$ . Совокупность таких выпуклых гиперповерхностей обозначим  $M_0^+(G)$ . Ясно, что

$$M_0^+(G) \subset K^+(G) \subset C(G).$$

Для  $M_0^+(G)$  выполняются все условия теоремы §4 гл. III из [3]. Отсюда получим следующую теорему.

*Теорема 1.* Уравнение в функциях множествах (4.3.5) имеют хотя бы одно решение в классе  $M_0^+(G)$ .

Теперь рассмотрим естественное отображение

$\chi: M_0^+(G) \rightarrow M^+(G)$ , т.е. если  $\Phi \in M^+(G)$  и  $\Phi_0 = \partial C_0 \Phi$ , то  $\chi(\Phi_0) = \Phi$ .

Это отображение взаимно-однозначное. Отсюда следует справедливость следующей теоремы.

*Теорема 2.* В условиях теоремы 1 существует минимальная гиперповерхность из класса  $M^+(G)$ , условная кривизна соответствующей  $m$ -выпуклой гиперповерхности есть сумма интегральных условных кривизн различных порядков.

Доказательство теоремы следует из теоремы 4, гл. III §§3 и 4 из [3].

#### Список литературы

- 1 Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. — М.: Наука, 1987. — 312 с.
- 2 Бакельман И.Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1965. — 340 с.
- 3 Таскараев А. Выпуклые поверхности и условная кривизна. — Шымкент: Изд-во ЮКСУ, 2005. — 124 с.

Ә.Тасқараев, Ә.Әбжапбаров, Н.Қ.Әшірбаев

#### Кіші және дөңес беттер

Мақалада оң жағы әр түрлі ретті шартты интегралдық қисықтың қосындысы болып келетін Монж-Ампер тендеуі қарастырылды. Берілген тендеуді интегралдау арқылы интегралдық тендеу алынады. И.Я.Бакельман теоремасын қолдана отырып, дөңес беттің конусын өзіне айналдыратын сызықтық емес  $U$  операторы құрылды.  $U$ -операторының функционалды топологиялық қасиеттері зерттелді. Штейнер теоремасын қолданудың маңыздылығы көрсетіліп,  $U$ -операторының үзіліссіздігі мен ықшамдылығы дәлелденді. Красносельский теоремасын қолданып, қойылған есептің шешімі болатын нүкте оператордың жылымайтын нүктесі бар екені дәлелденді.

A.Taskarayev, A.Abzhapbarov, N.K.Ashirbayev

#### The minimal and convex surfaces

We consider the Monge-Ampere's right-hand side which is the sum of the integral conditional curvatures of different orders. Integrating the given equation we obtain an integral equation Applying Theorem I.Ya.Bakelmana construct nonlinear  $U$  operator mapping the cone of convex surfaces themselves. The functional-topological properties of the operator  $U$ . Obtained important assessment applying the theorem of Steiner, as well as to prove the continuity and compactness of the operator  $U$ . Applying the theorem of Krasnosel'skii prove the existence of a fixed point of this operator is the solution to this problem.

#### References

- 1 Dao Chong Thi, Fomenko A.T. *Minimal surfaces and Plateau problem*, Moscow: Nauka, 1987, 312 p.
- 2 Bakel'man I.Ya. *Geometric methods for solving elliptic equations*, Moscow: Nauka, 1965, 340 p.
- 3 Taskarayev A. *The convex curvature of the surface and the conditional*, Shymkent: Publ. YuKSU, 2005, 124 p.