

А.Б.Муканов

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана  
(E-mail: mukanov.askhat@gmail.com)

## Преобразование Фурье и анизотропные пространства Лебега

В статье изучены интегральные свойства преобразований Фурье  $\hat{f}(y) = \int_{R_n} f(x)e^{-by} dx, n \geq 1$ , монотонных по каждой переменной функции  $f$ . В частности, получен многомерный аналог теоремы Харди-Литтлвуда о преобразовании Фурье монотонной функции.

*Ключевые слова:* преобразование Фурье, монотонные функции, анизотропные пространства Лебега.

### Введение

Хорошо известна классическая теорема Харди-Литтлвуда [1] о преобразовании Фурье монотонной функции.

*Теорема А.* Пусть  $1 < p < \infty$  и  $f(x)$  — невозрастающая, неотрицательная на  $(0, +\infty)$  функция, такая, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Пусть  $\hat{f}(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos tx dx$  — косинус-преобразование Фурье функции  $f$ . Тогда верно следующее соотношение:

$$\|\hat{f}\|_{L_p(0, \infty)} \sim \left( \int_0^{\infty} x^{p-2} f(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Всюду в статье через  $C$  будем обозначать положительную константу, которая в различных случаях может быть разной. Выражение  $T \sim S$  означает, что существует такое  $C$ , что верно неравенство  $CT \leq S \leq \frac{1}{C}T$ .

В одномерном случае теорема А имеет множество обобщений. Для весовых пространств Лебега обобщения теоремы А были получены в работах [2–6]. Для пространств Лоренца теорему А обобщали в работах [3, 7, 8].

Основной целью данной статьи является получение многомерного аналога теоремы А.

Всюду в статье жирными буквами будем обозначать вектора. И все операции над векторами будут производиться покоординатно.

*Определение 1.* Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Анизотропным пространством Лебега  $L_p(R^n)$  называется множество всех измеримых функций  $f$ , для которых

$$\|f\|_{L_p} := \left( \int_{-\infty}^{\infty} \dots \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t_1, \dots, t_n)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}} < \infty.$$

*Определение 2.* Будем говорить, что функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принадлежит классу  $E^n$ , если

- $f$  — неотрицательная функция на  $R^n$ ;
- $f(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \dots, \varepsilon_n x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  для всех  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ ,

где

$$\varepsilon_i \in \{1, -1\}, i = 1, 2, \dots, n;$$

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не возрастает по каждой переменной на  $R_+$ , т.е.

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^1, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^2, \dots, x_n)$$

для  $0 \leq x_i^2 \leq x_i^1, 1 \leq i \leq n$ ;

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow 0$  при  $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \rightarrow \infty$ .

Основным результатом статьи является следующая теорема.

*Теорема 1.* Пусть  $1 < p < \infty$  и  $f \in E^n$ . Тогда  $\|\hat{f}\|_{L_p} \sim J_p(f)$ ,

где

$$J_p(f) = \left( \int_0^\infty t_n^{p_n-2} \dots \left( \int_0^\infty t_1^{p_1-2} [f(t_1, \dots, t_n)]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

*Замечание 1.* Для удобства мы докажем теорему 1 для случая  $n=2$ . В общем случае рассуждения аналогичны. Отметим также, что для функций  $f$  из  $E^2$  верно равенство

$$\hat{f}(y_1, y_2) = 4\hat{f}_c(y_1, y_2) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 dx_1 dx_2.$$

*Вспомогательные утверждения*

Следующие неравенства Харди [9] и Минковского [10] будут часто использоваться.

*Лемма 1 (Харди).* Пусть  $\psi$  – неотрицательная измеримая функция на  $(0, \infty)$ , и пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\alpha < \frac{1}{p}$ . Тогда

$$\left( \int_0^\infty \left[ t^\alpha \int_0^t \psi(s) ds \right]^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left( \int_0^\infty [t^\alpha \psi(t)]^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

*Лемма 2 (Минковский).* Пусть  $1 \leq p \leq \infty$  и  $f(x, y)$  — измеримая функция на  $(X, \mu) \times (Y, \nu)$ . Тогда верно неравенство

$$\left( \int_Y \left( \int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right)^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left( \int_Y |f(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x). \tag{2}$$

*Замечание 2.* Заметим, что при  $0 < p < 1$  неравенство (1) верно для монотонных функций. Более того, это неравенство верно для квазимонотонных функций (см.[11]).

Также будем использовать следующую лемму [11].

*Лемма 3.* Пусть  $f$  — неотрицательная, невозрастающая функция на  $(0, \infty)$ , и пусть  $A > 0$ ,  $0 < q < 1$ . Тогда выполняется следующее неравенство:

$$\left( \int_0^A f(x) dx \right)^q \leq C \int_0^A (f(x))^q x^{q-1} dx. \tag{3}$$

*Лемма 1.* Пусть  $f \in E^2$ . Тогда для всех  $(y_1, y_2) \in R^2$  справедливо неравенство

$$\hat{f}(y_1, y_2) \leq 36 \int_0^{\frac{1}{|y_2|}} \int_0^{\frac{1}{|y_1|}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{4}$$

*Доказательство.* Из условия 2) определения 2 класса  $E^2$  следует, что достаточно доказать неравенство (4) для  $y > 0$ . Пусть  $y = (y_1, y_2)$ ,  $y_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}(y_1, y_2) &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 dx_1 dx_2 = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 dx_1 dx_2 + \\ &+ 4 \int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 dx_1 dx_2 + \\ &+ 4 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_{\frac{1}{y_1}}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 dx_1 dx_2 + \\ &+ 4 \int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} \int_{\frac{1}{y_1}}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cos x_1 y_1 \cos x_2 y_2 dx_1 dx_2 = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

По второй теореме о среднем по второй переменной в  $I_2$  получим

$$\begin{aligned} I_2 &= 4 \int_0^{\frac{1}{y_1}} \left[ \int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} f(x_1, x_2) \cos x_2 y_2 dx_2 \right] \cos x_1 y_1 dx_1 = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{y_1}} \left[ f\left(x_1, \frac{1}{y_2}\right) \int_{\frac{1}{y_2}}^{\xi} \cos x_2 y_2 dx_2 \right] \cos x_1 y_1 dx_1 = \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{y_1}} \left[ f\left(x_1, \frac{1}{y_2}\right) \frac{\sin y_2 \xi - \sin 1}{y_2} \right] \cos x_1 y_1 dx_1. \end{aligned}$$

Значит,

$$|I_2| \leq \frac{8}{y_2} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f\left(x_1, \frac{1}{y_2}\right) dx_1 \leq 8 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Аналогичным путем получим

$$|I_3| \leq 8 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Применяя дважды теорему о среднем для  $I_4$ , получим

$$\begin{aligned} I_4 &= 4 \int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} \left[ f\left(\frac{1}{y_1}, x_2\right) \int_{\frac{1}{y_1}}^{\zeta} \cos x_1 y_1 dx_1 \right] \cos x_2 y_2 dx_2 = \\ &= 4 \int_{\frac{1}{y_2}}^{+\infty} \left[ f\left(\frac{1}{y_1}, x_2\right) \frac{\sin y_1 \zeta - \sin 1}{y_1} \right] \cos x_2 y_2 dx_2 = \\ &= 4 f\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}\right) \frac{\sin y_1 \zeta - \sin 1}{y_1} \frac{\sin y_2 \alpha - \sin 1}{y_2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|I_4| \leq \frac{16}{y_1 y_2} f\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}\right) \leq 16 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} |\hat{f}(y_1, y_2)| &\leq |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| \leq \\ &\leq 36 \int_0^{\frac{1}{y_2}} \int_0^{\frac{1}{y_1}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

*Доказательство теоремы 1.* Сначала покажем оценку сверху для  $\|\hat{f}\|_{L_p}$ . Из леммы 4 получим

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_p} &\leq C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ \int_0^{t_1} \varphi(x_1, t_2) dx_1 \right]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x_1, t_2) = \int_0^{\frac{1}{t_2}} f(x_1, x_2) dx_2.$$

Сделаем замену  $z_1 = \frac{1}{t_1}$  и применим неравенство Харди (1) во внутреннем интеграле.

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_p} &\leq C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ \int_0^{t_1} \varphi(x_1, t_2) dx_1 \right]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ z_1^{-\frac{2}{p_1}} \int_0^{z_1} \varphi(x_1, t_2) dx_1 \right]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \\ &\leq C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \varphi(z_1, t_2) \right]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \int_0^{\frac{1}{t_2}} f(z_1, x_2) dx_2 \right]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Пусть  $p_1 \geq 1$ . Тогда из неравенства Минковского (2) вытекает

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_p} &\leq C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \int_0^{\frac{1}{t_2}} f(z_1, x_2) dx_2 \right]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \\ &\leq C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^{\frac{1}{t_2}} \left[ \int_0^\infty \left( z_1^{1-\frac{2}{p_1}} f(z_1, x_2) \right)^{p_1} dz_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} dx_2 \right)^{p_2} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^{\frac{1}{t_2}} \psi(x_2) dx_2 \right)^{p_2} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}, \end{aligned}$$

где

$$\psi(x_2) = \left[ \int_0^\infty \left( z_1^{1-\frac{2}{p_1}} f(z_1, x_2) \right)^{p_1} dz_1 \right]^{\frac{1}{p_1}}.$$

Снова, производя замену  $\frac{1}{t_2}$  на  $z_2$  и используя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_p} &\leq C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-\frac{2}{p_2}} \int_0^{z_2} \psi(x_2) dx_2 \right)^{p_2} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \\ &\leq C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{1-\frac{2}{p_2}} \psi(z_2) \right)^{p_2} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{1-\frac{2}{p_2}} \left[ \int_0^\infty \left( z_1^{1-\frac{2}{p_1}} f(z_1, z_2) \right)^{p_1} dz_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \right)^{p_2} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = J_p(f). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $0 < p_1 < 1$ . Тогда из неравенства (3) следует

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &\leq C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \left[ z_1^{1-\frac{2}{p_1}} \int_0^{t_2} f(z_1, x_2) dx_2 \right]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &\leq C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty z_1^{p_1-2} \left[ \int_0^{t_2} (f(z_1, x_2))^{p_1} x_2^{p_1-1} dx_2 \right] dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( \int_0^{t_2} \int_0^\infty z_1^{p_1-2} (f(z_1, x_2))^{p_1} x_2^{p_1-1} dz_1 dx_2 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}. \end{aligned}$$

Заменим  $\frac{1}{t_2}$  на  $z_2$ :

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_p} &\leq C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}} \int_0^{z_2} \int_0^\infty z_1^{p_1-2} f^{p_1}(z_1, x_2) x_2^{p_1-1} dz_1 dx_2 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \frac{1}{z_2} \int_0^{z_2} \xi(x_2) dx_2 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{p_1-1}{p_2 p_1}}, \end{aligned}$$

где

$$\xi(x_2) = \int_0^\infty z_1^{p_1-2} (f(z_1, x_2))^{p_1} x_2^{p_1-1} dz_1$$

— квазимоноотонная функция (так как функция  $\xi(x_2)x_2^{-(p_1-1)}$  не возрастает). Из неравенства Харди следует

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L_p} &\leq C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \frac{1}{z_2} \int_0^{z_2} \xi(x_2) dx_2 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{p_1-1}{p_2 p_1}} \leq \\ &\leq C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \xi(z_2) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{p_1-1}{p_2 p_1}} = \\ &= C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-\frac{2p_1}{p_2}+1} \int_0^\infty z_1^{p_1-2} (f(z_1, z_2))^{p_1} z_2^{p_1-1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{p_1-1}{p_2 p_1}} = \\ &= C J_p(f). \end{aligned}$$

Установим теперь оценку снизу для  $\|\hat{f}\|_{L_p}$ . Пусть  $\mathbf{z} = (z_1, z_2) > 0$ , тогда

$$\begin{aligned} H(\mathbf{z}) &:= \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \int_0^{u_2} \int_0^{u_1} \hat{f}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 du_1 du_2 = \\ &= \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \int_0^{u_2} \int_0^{u_1} \int_0^\infty \int_0^\infty f(t_1, t_2) \cos x_1 t_1 \cos x_2 t_2 dt_1 dt_2 dx_1 dx_2 du_1 du_2 = \\ &= \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \int_0^\infty \int_0^\infty f(t_1, t_2) \int_0^{u_2} \int_0^{u_1} \cos x_1 t_1 \cos x_2 t_2 dx_1 dx_2 dt_1 dt_2 du_1 du_2 = \\ &= \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(t_1, t_2)}{t_1 t_2} \operatorname{sint}_1 u_1 \operatorname{sint}_2 u_2 dt_1 dt_2 du_1 du_2 = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(t_1, t_2)}{t_1 t_2} \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \operatorname{sint}_1 u_1 \operatorname{sint}_2 u_2 du_1 du_2 dt_1 dt_2 = \\ &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(t_1, t_2)}{t_1^2 t_2^2} \sin^2 \frac{t_1 z_1}{2} \sin^2 \frac{t_2 z_2}{2} dt_1 dt_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 H\left(\frac{\pi}{2x_1}, \frac{\pi}{2x_2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2x_2}} \int_0^{\frac{\pi}{2x_1}} \int_0^{u_2} \int_0^{u_1} |\hat{f}(y_1, y_2)| dy_1 dy_2 du_1 du_2 \geq \\
 &\geq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2x_2}} \int_0^{\frac{\pi}{2x_1}} \int_0^{u_2} \int_0^{u_1} \hat{f}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 du_1 du_2 \right| = \\
 &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(t_1, t_2)}{t_1^2 t_2^2} \sin^2 \frac{\pi t_1}{4x_1} \sin^2 \frac{\pi t_2}{4x_2} dt_1 dt_2 \geq \\
 &\geq C \int_{\frac{x_2}{2}}^{2x_2} \int_{\frac{x_1}{2}}^{2x_1} \frac{f(t_1, t_2)}{t_1^2 t_2^2} dt_1 dt_2 \geq C \frac{f(2x_1, 2x_2)}{4x_1 x_2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим  $h(u_1, u_2) = \int_0^{u_2} \int_0^{u_1} |\hat{f}(y_1, y_2)| dy_1 dy_2$ . Тогда из (5) следует

$$\begin{aligned}
 J_p(f) &= \left( \int_0^\infty t_2^{p_2-2} \left( \int_0^\infty t_1^{p_1-2} [f(t_1, t_2)]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \\
 &\leq C \left( \int_0^\infty t_2^{p_2-2} \left( \int_0^\infty t_1^{p_1-2} \left[ t_1 t_2 \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(u_1, u_2) du_1 du_2 \right]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\
 &= C \left( \int_0^\infty t_2^{2p_2-2} \left( \int_0^\infty \left[ t_1^{2-\frac{2}{p_1}} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} h(u_1, u_2) du_1 du_2 \right]^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.
 \end{aligned}$$

Заменим  $\frac{\pi}{t}$  на  $z$  и применим неравенство Харди:

$$\begin{aligned}
 J_p(f) &\leq C \left( \int_0^\infty z_2^{-2p_2} \left( \int_0^\infty [z_1^{-2} \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} h(u_1, u_2) du_1 du_2]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \\
 &\leq C \left( \int_0^\infty z_2^{-2p_2} \left( \int_0^\infty [z_1^{-1} \int_0^{z_2} h(z_1, u_2) du_2]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\
 &= C \left( \int_0^\infty z_2^{-2p_2} \left( \int_0^\infty \left[ \int_0^{z_2} z_1^{-1} h(z_1, u_2) du_2 \right]^{p_1} dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned}
 J_p(f) &\leq C \left( \int_0^\infty z_2^{-2p_2} \left( \int_0^{z_2} \left[ \int_0^\infty (z_1^{-1} h(z_1, u_2))^{p_1} dz_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} du_2 \right)^{p_2} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\
 &= C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-2} \int_0^{z_2} \left[ \int_0^\infty (z_1^{-1} h(z_1, u_2))^{p_1} dz_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} du_2 \right)^{p_2} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.
 \end{aligned}$$

Из неравенства Харди получим

$$\begin{aligned}
 J_p(f) &\leq C \left( \int_0^\infty \left( z_2^{-1} \left[ \int_0^\infty (z_1^{-1} h(z_1, z_2))^{p_1} dz_1 \right]^{\frac{1}{p_1}} \right)^{p_2} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} = \\
 &= C \left( \int_0^\infty z_2^{-p_2} \left[ \int_0^\infty \left( z_1^{-1} \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} |\hat{f}(y_1, y_2)| dy_1 dy_2 \right)^{p_1} dz_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.
 \end{aligned}$$

Применяя дважды неравенство Харди и неравенство Минковского к последнему выражению, получим требуемую оценку.

### Список литературы

- 1 Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. — С. 150.
- 2 Boas R.P.Jr. The integrability class of the sine transform of a monotonic function // *Stud. Math.* — 1972. — No. 44. — P. 365–369.
- 3 Sagher Y. Integrability conditions for the Fourier transform // *Journal Math. Anal. Appl.* — 1976. — No. 54. — P. 151–156.
- 4 Lifyand E., Tikhonov S. Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms // *C.R. Math. Acad. Sci. Paris.* — 2008. — № 346. — P. 1137–1142.
- 5 Dyachenko M., Lifyand E., Tikhonov S. Uniform convergence and integrability of Fourier integrals // *Journal Math. Anal. Appl.* — 2010. — No. 372. — P. 328–338.
- 6 Gorbachev D., Lifyand E., Tikhonov S. Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in  $R^n$  // *Journal d'Analyse Mathématique.* — 2011. — Vol. 114. — No. 1. — P. 99–120.
- 7 Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и преобразование Фурье // *Докл. РАН.* — 1998. — Т. 361. — № 5. — С. 597–599.
- 8 Копежанова А.Н., Нурсултанов Е.Д., Перссон Л.-Е. О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространств Лоренца // *Математические заметки.* — 2011. — Т. 90. — № 5. — С. 785–788.
- 9 Bennet C., Sharpley R. *Interpolation of Operators.* — М.: Academic Press, 1988. — P. 124.
- 10 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* — М.: Наука, 1975. — С. 22.
- 11 Bergh J., Burenkov V., Persson L.-E. Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone functions // *Acta Sci. Math. (Szeged).* — 1994. — No. 59. — P. 221–239.

А.Б.Мұқанов

### Фурье түрлендіруі және анизотропты Лебег кеңістіктері

Мақалада әр айнымалы бойынша монотонды  $f$  функциялардың  $\hat{f}(y) = \int_{R_n} f(x)e^{-iyx} dx, n \geq 1$  Фурье түрлендірулерінің интегралдық қасиеттері зерттелді. Соның ішінде монотонды функцияның Фурье түрлендіруі бойынша Харди және Литтлвудтың теоремасының көпөлшемді аналогы алынды.

A.B.Mukanov

### Fourier transform and anisotropic Lebesgue spaces

In this paper we study integral properties of the Fourier transforms  $\hat{f}(y) = \int_{R_n} f(x)e^{-iyx} dx, n \geq 1$  of monotone in each variable functions  $f$ . In particular, we get a multidimensional analogue of Hardy-Littlewood theorem on Fourier transform of monotone function.

### References

- 1 Titchmarsh Ye. *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Moscow; Leningrad: GITTL, 1948, p. 150.
- 2 Boas R.P.Jr. *Stud. Math.*, 1972, 44, p. 365–369.
- 3 Sagher Y. *J. Math. Anal. Appl.*, 1976, 54, p. 151–156.
- 4 Lifyand E., Tikhonov S. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2008, 346, p. 1137–1142.
- 5 Dyachenko M., Lifyand E., Tikhonov S. *Journal Math. Anal. Appl.*, 2010, 372, p. 328–338.
- 6 Gorbachev D., Lifyand E., Tikhonov S., *Journal d'Analyse Mathématique*, 2011, 114 (1), p. 99–120.
- 7 Nursultanov E.D. *Net spaces and Fourier transform*, Report RAN, 1998, 361 (5), p. 597–599.
- 8 Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E. *Math. Notes*, 2011, 90, 5, p. 767–770.
- 9 Bennet C., Sharpley R. *Interpolation of Operators*, Moscow: Academic Press, 1988, p. 124.
- 10 Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M., *Integral representations of functions and imbedding theorems*, Moscow: Nauka, 1975, p. 22.
- 11 Bergh J., Burenkov V., Persson L.-E. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1994, 59, p. 221–239.