

# ФИЗИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ

## МЕТОДИКА ФИЗИКИ

### METHODOLOGY OF PHYSICS

УДК 530.11

К.М. Арынгазин<sup>1</sup>, И.Ф. Васильева<sup>2</sup>, В.В. Архипов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Казахстан;

<sup>2</sup>ООО УК «АВИАСЕРВИС», Воронеж, Россия;

<sup>3</sup>Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, Россия  
(E-mail: midav\_73@mail.ru)

#### Логико-структурные схемы построения теоретической физики

В статье рассмотрен подход к методике преподавания теоретической физики с использованием логико-структурных схем. Данный подход основан на методе геометрических идей и позволяет систематизировать и структурировать знания студентов физических специальностей в области теоретической физики. А именно в статье показано, как соотносятся различные физические теории (релятивистская теория относительности, электродинамика, квантовая механика, канонический формализм) с лежащими в их основе геометриями (пространство Минковского, симплектическая геометрия и др.) и как они, взаимно дополняя друг друга, оказываются частями единой геометрической картины мира. Представленные логико-структурные схемы построения теоретической физики, основанные на различных вариантах сопоставления понятий о пространстве, времени и массе, вытекающих из соответствующих философских логик, явным образом демонстрируют существование глубокой взаимосвязи между представлениями о формах материи и пространственных многообразиях, в которых описывается тот или иной вид материи. Как следствие, из этой взаимосвязи вытекает идея структурирования теоретической физики. Приведенный подход в виде логико-структурных схем дает возможность систематизировать сложные и глубокие разделы теоретической физики и найти в них общее связующее звено, опираясь на которое можно попытаться объединить всю теоретическую физику.

*Ключевые слова:* теоретическая физика, методика преподавания теоретической физики, геометрические идеи, логико-структурные схемы.

Образование — тот ключевой момент, фактор, без которого познать мир невозможно. Оно раскрывается в воспитании и обучении нового человека. В этом процессе особая роль принадлежит вузу.

В конце четвертого курса студенты физического факультета завершают изучение теоретической физики, и каждый из них имеет свое мировоззрение, понимание и знание в этом сложном предмете. Значит, они получают сумму знаний по различным разделам теоретической физики, и слагаемые этой суммы столь разнообразны, что зачастую не поддаются сложению. У студента складывается «кусочное» представление о теоретической физике, о физической картине мира и не складывается целостная работающая конструкция. С другой стороны, сегодняшние многочисленные и крайне сложные физические теории и проблемы их понимания требуют ясного освоения того, что сближает и объединяет разные разделы физики, сохраняясь в каждом разделе, независимо от его названия.

Целью настоящей работы является разработка логико-структурных схем построения всех разделов теоретической физики с использованием метода геометрических идей [1]. Мы считаем, что использование данного подхода в методике преподавания теоретической физики позволит студентам понять красоту внутренней структуры всей физики. Также одним из достоинств можно назвать то, что в данных схемах можно изобразить все известные законы физической природы и, в частности, увидеть проблемы физики в будущем.

Данный подход позволит студентам приобретать не сумму, а систему базовых научных знаний, и понимать то, как нужно освоить законы, чтобы создать в будущем работающую эффективную методику познания и применять ее в практической деятельности.

В принципе, законов природы может быть столько, сколько известно физических величин. Однако из всех известных величин мы выделяем в качестве базовых такие величины, как пространство, время, масса и человек, показывая тем самым, что они, как стержень пронизывающие насквозь всю систему, изменяются, в то же время оставаясь неизменяемыми. Это и есть фундаментальный закон природы, на который опирается физическая наука.

Как известно, физика — это наука о природе, которая изучает материю, формы ее движения, а также фундаментальные взаимодействия природы, которые управляют движением материи. Изменения во времени, происходящие с различными формами материи, называются физическими явлениями. В свою очередь, понятие материи является достаточно широким, но если рассматривать его с точки зрения физики, то можно определить ее как «нечто, существующее в пространстве и во времени... связанное с любыми объектами, существующими в природе» [2]. То есть основной задачей физики является описание свойств тех или иных видов материи, а также ее взаимодействия. Как известно, основными видами материи являются вещество и поле.

Определим подробнее, что при дальнейших рассуждениях в данной работе будет подразумеваться под веществом, полем, а также какими свойствами данные виды материи наделяют объекты, которые будут рассматриваться.

На ранних этапах развития физики вещество и поле противопоставлялись друг другу, что можно проследить, анализируя приведенные ниже определения.

Вещество — форма материи, которая, в отличие от поля, обладает массой покоя, дискретной структурой и может находиться в четырех состояниях (твердое тело, жидкость, газ, плазма). Свойства вещества могут различаться в зависимости от агрегатного состояния, в котором оно находится, благодаря которому одно вещество может отделяться от других. В общем случае к свойствам вещества относятся плотность (у однородных веществ), температура плавления, температура кипения, теплоемкость, диэлектрическая проницаемость, электропроводность, концентрация, вязкость и др.

Поле — форма материи, посредством которой осуществляются взаимодействия (электромагнитное, гравитационное, сильное и слабое) между частицами вещества, обладает непрерывной структурой и характеризует все точки пространства и времени. Свойством поля можно считать обладание им таких характеристик, как плотность энергии, плотность импульса, плотность момента импульса.

Однако после открытия в квантовой теории корпускулярно-волнового дуализма четкие границы между веществом и полем размылись. В современном представлении подразумевается, что и вещество и поле состоят из различных частей, обладающих двойственной природой, т.е. при определенных условиях могут проявляться свойства вещества либо свойства поля. Выявление взаимосвязи между веществом и полем привело, в свою очередь, к углублению представлений о единстве всех форм и структуры материального мира.

Постараемся применить данные выше определения к области теоретической физики, задачами которой являются открытие общих законов (как обобщение результатов частных опытов), прогнозирование ожидаемого поведения тех или иных физических систем, а также предсказание результатов конкретных экспериментов [3]. Предметом теоретической физики являются математические модели, заменяющие реальные физические объекты, математический анализ которых позволяет выявить их особенности, свойства и взаимосвязь друг с другом.

Если рассматривать разделы теоретической физики в контексте с определениями о веществе и поле, то можно представить их в виде следующей систематизации:

1. Областью исследований классической механики являются объекты, которые обладают свойствами вещества, так как она изучает законы движения (т.е. изменение положения тел относительно друг друга в пространстве с течением времени) и равновесия макроскопических материальных тел [2, 4].

2. Областью исследований электродинамики являются объекты, которые обладают свойствами поля, так как она изучает электромагнитное поле и его взаимодействие с телами, имеющими электрический заряд, посредством электромагнитного взаимодействия [2].

3. Областью исследования квантовой механики являются объекты, которые обладают свойствами как вещества, так и поля. Это следует из того, что физической основой квантовой механики является корпускулярно-волновой дуализм, согласно которому не только любой волне с частотой  $\omega$  и

волновым вектором  $\vec{k}$  отвечает частица с энергией  $\varepsilon$  и импульсом  $\vec{p}$ , но и обратно, с любой частицей, обладающей энергией и импульсом, связана волна, частота и волновой вектор определяются известными соотношениями [2].

4. Областью исследований термодинамики и статистической физики является совокупность объектов, обладающая свойствами вещества и поля, так как она изучает законы поведения коллективных систем, которые основываются на статистических закономерностях. Предсказания статистической физики и термодинамики носят вероятностный характер. В этом проявляется специфика статистических закономерностей, присущих именно макроскопическим телам. Вероятностный характер предсказаний позволяет сблизить классическое рассмотрение с квантовым, в котором вероятность лежит в природе вещей [2].

Анализ сказанного выше позволяет визуально представить взаимосвязь разделов теоретической физики и форм материи, которые они описывают, в виде следующей схемы (рис. 1).



Рисунок 1. Схема взаимосвязи разделов теоретической физики и форм материи, которые описываются ими

Приведенная схема дает целостную картину о предмете изучения как теоретической физики в целом, так и ее частных разделах с точки зрения форм материи. Данную схему можно применять в начале изучения курса теоретической физики, чтобы студенты, изучающие теоретическую физику, видели логику ее развития.

Также можно проследить развитие теоретической физики в контексте с понятием материи в историческом плане. Это позволит студентам понять, как шло развитие научного мировоззрения на протяжении нескольких веков, и четко идентифицировать при анализе ситуаций и решении поставленных проблем, какая область теоретической физики позволит лучше описать интересующие формы материи. Если это медленно движущаяся материя (со скоростью намного меньше скорости света), обладающая свойствами вещества, то для описания используются законы классической механики. Если рассматривается быстро движущаяся материя, обладающая свойствами поля, то для описания используется электродинамика. Если описывается быстро движущаяся материя в микромире, то она обладает как свойствами вещества, так и свойствами поля и описывается квантовой механикой. Если же рассматривается не одиночный физический объект, а их совокупность, то для описания используются вероятностные законы статистической физики.

Кроме того, ранее [5] нами было показано, что в развитии физических теорий выделяются такие философские логики, как пространство, движение и материя, из которых вытекают фундаментальные идеи, позволяющие построить теоретическую физику. Для выделения фундаментальных идей необходимо раскрыть представление о логиках. Мы выделяем четыре логики: пространство, движение, материя и человек.

*Пространство.* Необходимость введения данной логики при рассмотрении физики объясняется тем, что изменчивость (размеры, положение) окружающих человека объектов должна быть привязана к некоторым постоянным составляющим. Пространство — это математический мир, в котором удобно описывать положение и состояние физических объектов. Логика пространства связана с геометри-

ческими представлениями и основана на присвоении объекту координат, с помощью которых описывается положение тела в том или ином пространстве относительно других тел.

*Движение.* Введение данной логики становится необходимым, когда начинается процесс изменения, связанного с протеканием того или иного события описываемого объекта. Для того чтобы данное изменение можно было проследить, необходимо ввести понятие его длительности, т.е. протяженности события во времени. Очевидно, что рассмотрение «застывшего», стационарного объекта (т.е. объекта, который описывается только в терминах логики пространства) в замкнутом мире не может полностью его охарактеризовать.

*Материя.* Данная логика вводится тогда, когда необходимо рассматривать свойства объекта, а также процесс его взаимодействия с другими объектами. Если при описании объекта используются только первые две логики, то оно будет абстрактным, т.е. математическим. Добавление логики о материальности объекта сразу делает описание физическим, реальным, позволяющим опираться на экспериментальные факты. Для характеристики материальности объекта его наделяют энергией или массой (которые, по определению Эйнштейна, эквивалентны). Тогда можно сказать, что материя — это сгусток энергии в пространственно-временном изменении.

*Человек.* Обозначение данной логики обусловлено тем, что она венец всего сущего. Человек является творцом всего происходящего в окружающей действительности. Физика, в том числе, построена человеком, т.е. его творчеством. Введение человека как логики является отдельной проблемой, которая имеет методологический и мировоззренческий характер. Она относится к сфере философии образования.

Теперь на основе анализа понятий о логиках проанализируем возможные варианты их сопоставления.

Первый вариант: пространство, время и масса абсолютны (идеи заложены Ньютоном и развиты Лагранжем и Гамильтоном). Механика Ньютона рассматривает свободное движение тел в евклидовом пространстве, где отсутствует вариация пространства и времени. Механика Лагранжа рассматривает ограниченное движение в конфигурационном пространстве, где пространство варьирует, а время не варьирует. Механика Гамильтона рассматривает механическое движение тел в фазовом пространстве, где варьируют как пространство, так и время. В каждой из механик применяются законы соответствующих геометрий (пространственных многообразий), связь между которыми изображена на рисунке 2.

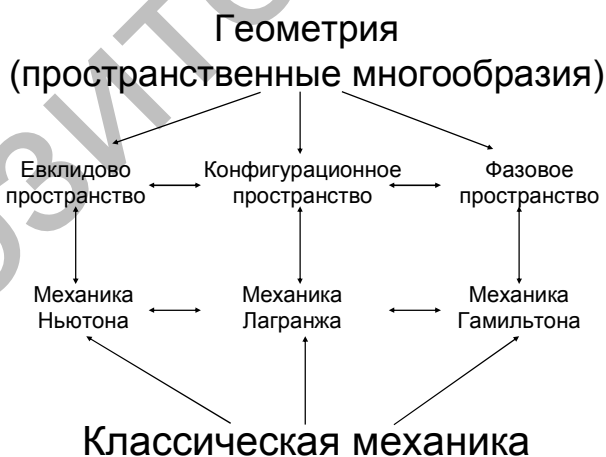


Рисунок 2. Схема взаимосвязи пространственных многообразий и различных видов механик, которые используются при описании классической механики

Второй вариант: пространство, время и масса относительны, т.е. они зависят от скорости тел; скорость света величина постоянная, и она не зависит ни от скорости наблюдателя, ни от скорости источника. Эйнштейн расширил известный принцип Галилея, используемый в классической механике. В зависимости от соотношения скорости тел и скорости света физика делится на нерелятивистскую (скорость движения тела намного меньше скорости света, материя обладает больше свойствами вещества) и релятивистскую (скорость движения тела сравнима со скоростью света, материя обладает свойствами поля). Геометрическая интерпретация релятивистской физики была дана Минковским,

который в качестве четвертой координаты ввел время (плоское псевдоевклидово пространство), и развита Риманом и Лобачевским (искривленное четырехмерное пространство, т.е. выпуклое сферическое пространство и вогнутое гиперболическое пространство, соответственно).

Данное направление было названо теорией относительности, которая, в зависимости от пространства, в котором она рассматривается, делится на специальную теорию относительности (СТО) и общую теорию относительности (ОТО). Если развитие событий (движение) лучше происходит в плоском четырехмерном пространстве Минковского, то такая теория называется СТО. Если движение происходит в искривленном четырехмерном пространстве Римана и Лобачевского, то теория называется ОТО. Связь между различными теориями релятивистской физики и пространственными многообразиями, используемыми для ее описания, представлена на рисунке 3.

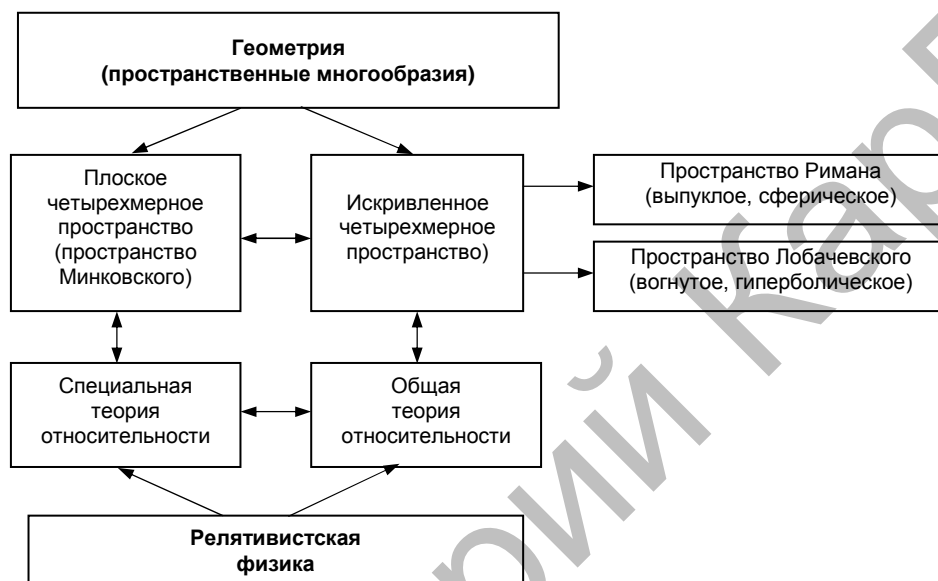


Рисунок 3. Схема взаимосвязи пространственных многообразий и теорий относительности, которые используются при описании релятивистской физики

Третий вариант: пространство, время и масса квантуются, т.е. электромагнитные волны (фотоны) ведут себя и как частица, квант, а элементарные частицы (электрон, протон, нейтрон, атом, молекулы и т.д.) ведут себя не только как частицы, но и как волна. Первоначально идеи были выдвинуты Планком (квантованность фотона) и де Бройлем (наличие волновых свойств у элементарных частиц) и в дальнейшем развиты Шредингером, Гейзенбергом, Дираком, Паули, Клейном-Гордоном и другими.

На рисунке 4 представлена схематичная взаимосвязь пространственных многообразий и видов механик, которые используются при рассмотрении квантовой механики, которая была построена на основе идей о квантованности фотона. Корпускулярно-волновой принцип, смысл которого состоит в замене обычных физических величин классической физики операторами, а волновые свойства материи — волновой функцией, где операторы действуют на волновую функцию, изменяя ее, позволил охватить и волновые и вещественные аспекты материального мира. Механика Шредингера охватывала волновые аспекты, а механика Гейзенберга — матричные аспекты нерелятивистской квантовой механики. Расширением механики Шредингера в релятивистской квантовой механике являются уравнение Клейна-Гордона и уравнение (механика) Дирака.

Если рассматривать с точки зрения геометрии, то нерелятивистская квантовая механика рассматривается в гильбертовом пространстве, а релятивистская квантовая механика — в пространстве векторов состояний. Причем необходимо отметить, что гильбертово пространство — это математическое понятие, которое обобщает понятие евклидова пространства на бесконечномерный случай.

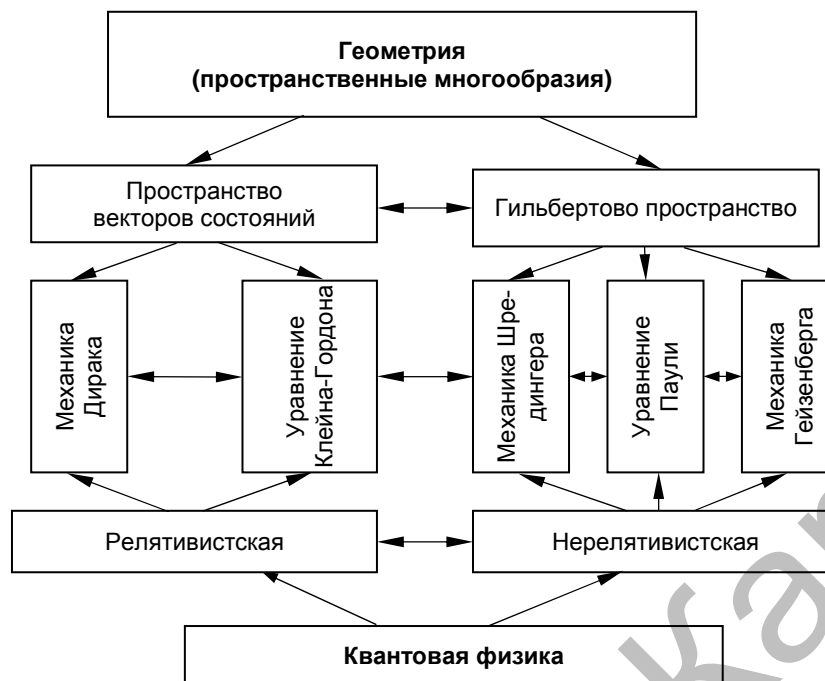


Рисунок 4. Схема взаимосвязи пространственных многообразий и теорий относительности, которые используются при описании квантовой физики

Отдельно необходимо рассмотреть случай системы, содержащей большое количество частиц и, следовательно, с произвольным (бесконечным) числом степеней свободы, для описания которой необходимо использовать вероятностный подход. Этот случай рассматривается в статистической физике и термодинамике и позволяет описать усредненную эволюцию системы в целом и предсказать ее поведение. Отличительной особенностью раздела является то, что изучаемые системы могут быть как классическими, так и квантовыми. Таким образом, вероятностный характер протекающих явлений и процессов позволяет сблизить классическое и квантовое рассмотрение, т.е. можно утверждать, что классическая статистическая физика по своему аппарату эквивалентна квантовой теории.

Статистическая физика фактически делится на статистическую механику (раздел, изучающий поведение систем с произвольным конечным числом частиц), которую впервые ввел М. Борн в 1955 г., и статистическую теорию поля (раздел, изучающий пространственные случайные системы с взаимодействием, объектом которого являются поля или системы с бесконечным числом степеней свободы). В свою очередь, статистическая механика подразделяется на равновесную и неравновесную, которые изучают, соответственно, свойства систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и способы перехода систем в локальное равновесие. Последовательное построение равновесной статистической механики было реализовано Дж.В. Гиббсом в 1902 г., а последовательное построение неравновесной статистической механики было выполнено Н.Н. Боголюбовым в 1946 г. Основными уравнениями статистической механики являются уравнения Лиувилля и цепочка уравнений Боголюбова. Отдельным разделом статистической механики выделяется квантовая статистика, в которой  $n$ -частичные квантовые системы описываются методом статистических операторов комплексов частиц. Число частиц может быть произвольным натуральным (конечным) числом или бесконечностью. В узком смысле под квантовой статистикой имеют в виду статистики Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.

Можно считать, что уравнение Лиувилля, описывающее эволюцию во времени функции распределения гамильтоновой системы в фазовом пространстве, является частным случаем цепочки уравнений Боголюбова (или, иначе, цепочка ББККИ — цепочка уравнений Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда-Ивона), описывающей эволюцию системы, состоящей из большого числа тождественных взаимодействующих частиц, с функцией распределения, удовлетворяющей уравнению Лиувилля, которые заключены в некотором объеме  $V$  с учетом потенциалов парного взаимодействия и взаимодействия с внешним полем. Цепочку уравнений ББККИ можно получить последовательным интегрированием уравнения Лиувилля по части переменных.

С геометрической точки зрения статистическая механика и термодинамика (как равновесная, так и неравновесная) рассматриваются в фазовом пространстве. Квантовая статистика и термодинамика рассматриваются в спектральном пространстве, которое представляет собой искривленное фазовое пространство (геометрия гильбертова пространства, построенная с использованием оператора Лапласа-Бельтрами). А теория поля рассматривается в псевдоевклидовом пространстве (если говорить строже, то квантовая теория поля описывается в гильбертовом пространстве, которое является обобщением евклидова пространства на случай бесконечной размерности, а для статистической теории поля можно, выполняя поворот Вика, перейти от пространства Минковского к псевдоевклидову пространству, которое, в свою очередь, является расширением евклидова пространства) [6, 7]. Данное описание в виде схемы представлено на рисунке 5.

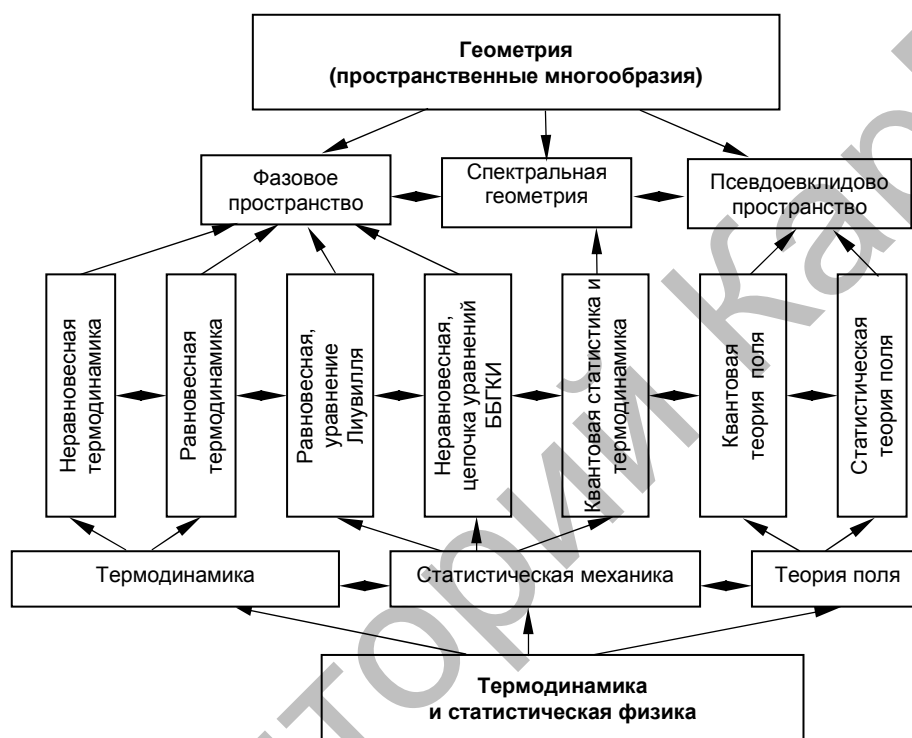


Рисунок 5. Схема взаимосвязи пространственных многообразий и разделов термодинамики и статистической физики

Таким образом, анализируя все приведенные выше схемы построения теоретической физики, основанные на различных вариантах сопоставления понятий о пространстве, времени и массе, вытекающих из соответствующих философских логик, можно предположить, что существует глубокая взаимосвязь между представлениями о формах материи и пространственных многообразиях, в которых описывается тот или иной вид материи. Как следствие, из этой взаимосвязи вытекает идея структурирования теоретической физики. Приведенный подход в виде логико-структурных схем дает возможность систематизировать сложные и глубокие разделы теоретической физики и найти в них общее связующее звено, опираясь на которое можно попытаться объединить всю теоретическую физику.

#### Список литературы

- 1 Арынгазин К.М. Геометрические идеи в теоретической физике: монография / К.М. Арынгазин. — Алматы: Рауан, 1994. — 360 с.
- 2 Физическая энциклопедия: в 5 т. — Т. 3 / под ред. А.М. Прохорова. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1994. — 672 с.
- 3 Медведев Б.В. Начала теоретической физики: учеб. пособие / Б.В. Медведев. — М.: Наука, 1977. — 496 с.
- 4 Мултановский В.В. Курс теоретической физики: Классическая механика. Основы СТО. Релятивистская механика: учеб. пособие / В.В. Мултановский. — М.: Просвещение, 1988. — 304 с.

5 Арынгазин К.М. Методологические проблемы построения теоретической физики / К.М. Арынгазин, И.Ф. Васильева // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Физика. — 2010. — № 3(59). — С. 56–61.

6 Розенблум Г.В. Спектральная теория дифференциальных операторов / Г.В. Розенблум, М.З. Соломяк, М.А. Шубин // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1989. — Т. 64. — С. 1–242.

7 Алексеевский Д.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии / Д.В. Алексеевский, А.М. Виноградов, В.В. Лычагин // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1988. — Т. 28. — С. 5–289.

К.М. Арынгазин, И.Ф. Васильева, В.В. Архипов

## Теориялық физиканың логика-құрылымдық сұлбалары

Мақалада логика-құрылымдық сұлбаларды пайдаланып, теориялық физиканы оқыту әдістемесіне тәсілдеме қарастырылды. Бұл тәсіл геометриялық идеялар әдісіне негізделген және теориялық физика саласындағы физикалық мамандықтар студенттерінің білімін жүйелеуге және құрылымдауға мүмкіндік берді. Атап айтқанда, жұмыста әртүрлі физикалық теориялар (салыстырмалық релятивистік теориясы, электродинамика, кванттық механика, канондық формализм) оның негізіндегі геометриямен (Минковский кеңістігі, симплектикалық геометрия және т.б.) қалай байланысатыны және олар бір-бірін өзара толықтырып, әлемнің біртұтас геометриялық кескінінің бөліктері болып табылатыны көрсетілді. Философиялық логикадан шығатын кеңістік, уақыт және масса туралы ұғымдарды әртүрлі нұсқаларда салыстыруға негізделген теориялық физиканы құрудың логика-құрылымдық сұлбалары материя түрлері мен кеңістіктік алуан түрлері туралы ұсынылған өзара байланыстың терең екендігін айқын көрсетеді. Нәтижесінде, бұл өзарабайланыс теориялық физиканы құрылымдау идеясына әкеледі. Логика-құрылымдық сұлбалар түріндегі бұл тәсілдеме теориялық физиканың күрделі және терең тарауларын жүйелеуге және оларға барлық теориялық физиканы біріктіруге тырысатын ортақ түйінді табуға мүмкіндік береді.

*Кілт сөздер:* теориялық физика, теориялық физиканы оқыту әдістемесі, геометриялық ойлар, логика-құрылымдық сұлбалар.

K.M. Aryngazin, I.F. Vassileva, V.V. Arkhipov

## Logic-structural schemes of theoretical physics construction

The approach to the teaching of theoretical physics with the use of logical-structural schemes is considered in the article. This approach is based on the method of geometric ideas and allows to systematize and to structure knowledge of students of physical specialties in the field of theoretical physics. Namely, the paper shows how different physical theories (relativity theory, electrodynamics, quantum mechanics, canonical formalism) relate to the underlying geometries (Minkowski space, symplectic geometry, etc.), and how they mutually complement each other, are parts of a single geometric picture of the world. The presented logical and structural schemes for constructing theoretical physics based on different variants of the comparison of the concepts of space, time and mass, resulting from the corresponding philosophical logics, clearly demonstrate the existence of a deep interrelation between the ideas about the forms of matter and spatial varieties in which one or another species is described matter. As a consequence, this leads to the idea of structuring of theoretical physics. This approach in the form of logical and structural schemes makes it possible to systematize complex and profound branches of theoretical physics and to find in them a common link, based on which one can try to unite all theoretical physics.

*Keywords:* theoretical physics, methods of theoretical physics teaching, geometrical ideas, logical structural schemes.

## References

- 1 Aryngazin, K.M. (1994). *Heometricheskie idei v teoreticheskoi fizike [Geometry ideas in theoretical physics]*. Almaty: Rauan [in Russian].
- 2 Prokhorov, A.M. (Eds.). (1994). *Fizicheskaya entsiklopediya [Physical encyclopedia]*. Moscow: Bolshaia Rossiiskaia entsiklopediya [in Russian].
- 3 Medvedev, B.V. (1977). *Nachala teoreticheskoi fiziki [Foundations of theoretical physics]*. Moscow: Nauka [in Russian].
- 4 Multanovskii, V.V. (1988). *Kurs teoreticheskoi fiziki: klassicheskaya mekhanika. Osnovy STO. Relativistskaya mekhanika [Theoretical physics course: Classical Mechanics. Foundations of STR. Relativistic Mechanics]*. Moscow: Prosveshchenie [in Russian].



5 Aryngazin, K.M., & Vassileva, I.F. (2010). Metodologicheskie problemy postroeniia teoreticheskoi fiziki [Methodological problems of theoretical physics building]. *Vestnik Karahandinskoho universiteta. Seriya Fizika — Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*, 3(59), 56–61 [in Russian].

6 Rozenblum, G.V., Solomyak, M.Z., & Shubin, M.A. (1989). Spektralnaia teoriia differentsialnykh operatorov [The spectral theory of differential operators]. *Itohi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniia — Science and Technics Results. Series The modern math problems. Fundamental directions*, 64, 1–242.

7 Alekseevskii, D.V., Vinogradov, A.M., & Lychagin, V.V. Osovnye idei i poniatii differentsialnoi heometrii [The main ideas and notions of differential geometry]. *Itohi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniia — Science and Technics Results. Series The modern math problems. Fundamental directions*, 28, 5–289.

Репозиторий КарГУ